答案与提示

习题 1-1

1. $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$, $\{0,1,2\}$, $\varnothing$.

2. $A\cup B=\{1,2,3,5\}$; $A\cap B=\{1,3\}$; $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$; $A\cap B\cap C=\varnothing$; $A\backslash B=\{2\}$.

3. $A\cup B=\{-3,-2,-1,0,1,2,4,6,9\}$; $A\cap B=\{0,2,4\}$, $A\backslash B=\{6,9\}$.

4. $A\cup B=\mathbf{R}$; $A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$; $A\backslash B=\{x\mid x\geqslant 3\}$.

5. 略.

6. (1) $x>-1$. (2) $x\neq 0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

7. (1) 不相同. (2) 不相同. (3) 不相同. (4) 相同.

8. (1) 偶函数. (2) 非奇函数,也非偶函数. (3) 偶函数. (4) 奇函数.
(5) 非奇函数,也非偶函数. (6) 偶函数. (7) 奇函数. (8) 奇函数.

9. 略.

10. $f(-1)=2$, $f(1)=1$.

11. 略.

12. (1) $y=x^2-1$. (2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$. (3) $y=\begin{cases} x+1, & x<-1, \\ \sqrt[3]{x}, & x\geqslant 0. \end{cases}$

习题 1-2

1. (1) $[-2,4]$. (2) $(-\infty,-1)\cup(1,3)$. (3) $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.
(4) $D=[1,4]$. (5) $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

2. (1) $[1,2]$. (2) $[0,+\infty)$. (3) $[2n\pi,(2n+1)\pi]$ $(n=0,\pm 1,\cdots)$.
(4) 若 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$,则 $a\leqslant x\leqslant 1-a$;若 $a>\dfrac{1}{2}$,则函数无处有定义.

3. $\varphi(x)=\dfrac{x}{x+4}$, $\varphi(x-1)=\dfrac{x-1}{x+3}$.

4. $f[g(x)]=\begin{cases} \mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0, \\ 3\mathrm{e}^{x}, & 0<x\leqslant \ln 2. \end{cases}$

5. $f[f(x)]=1$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

△6～△7. 略.

△8. (1) $p=\begin{cases} 90, & 0\leqslant x\leqslant 100, \\ 90-0.01(x-100), & 75,100<x<1\,600, \\ 75, & x\geqslant 1\,600. \end{cases}$

(2) $L=(p-60)x=\begin{cases} 30, & 0\leqslant x\leqslant 100, \\ 31x-0.01x^2, & 100<x<1\,600, \\ 15x, & x\geqslant 1\,600. \end{cases}$

(3) 21 000 元.

习题 1-3

1. 略.

2. (1) 0. (2) 1. (3) 1. (4) 2. (5) 发散.

(6) $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$；$q=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=1$；$q=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n$ 不存在.

3. 略.

习题 1-4

1. (1) 0，$y=0$. (2) 0，$y=0$. (3) 1，$y=1$.

2. (1) 2. (2) 1. (3) 5. (4) 1.

3. $f(0^+)=2$，$f(0^-)=-1$；$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

习题 1-5

1. 略.

2. (1) 无穷小量. (2) 无穷大量. (3) 无穷大量. (4) 无穷小量.

3. (1) $+\infty$，$x=0$. (2) $-\infty$，$x=0$. (3) $+\infty$，$x=-\dfrac{\pi}{2}$.

4. (1) 0. (2) $\dfrac{\pi}{2}$.

* 5. $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$时，$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty(n\to\infty)$；$y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$时，$f(y_n)=0$ 为无穷小.

由此 $f(x)$在区间$(0,1)$上既不是无穷大也不是无穷小.

* 6. 提示：类似于题 5，取 $x_n=2n\pi$ 及 $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

习题 1-6

1. (1) -1. (2) 0. (3) $-\dfrac{1}{2}$. (4) $\dfrac{1}{2}$. (5) $3x^2$. (6) 1. (7) -2. (8) 0. (9) $\dfrac{1}{6}$.

(10) 64. (11) -1. (12) 1. (13) $\dfrac{1}{2}$. (14) 2.

2. (1) ∞. (2) ∞.

3. (1) 0. (2) 1.

4. (1) 不一定. (2) 一定不存在. (3) 不一定.

(4) 不一定. 如取 $f(x)=1$，$g(x)$在点 x_0 极限不存在，则 $\lim f(x)g(x)=\lim g(x)$极限不存在.

而取 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 极限存在. 如 $g(x)$为有界函数，而 $\lim f(x)=0$，则一定有 $\lim f(x)g(x)=0$.

5. $a=1$，$b=-1$.

习题 1-7

1. (1) π. (2) 1. (3) $\frac{3}{2}$. (4) x. (5) π. (6) 2. (7) $\frac{1}{e}$. (8) e^4. (9) e^{-x}. (10) 1. (11) e^{-1}. (12) e.

2. $k=2$.

习题 1-8

1. x^2-x^3 是高阶无穷小.

2. 当 $x\to 1$ 时,无穷小 $1-x$ 与 $1-x^3$ 同阶,与 $1-x^3$ 等价.

3. 略.

4. (1) $\frac{1}{2}$. (2) 2. (3) $-\frac{1}{4}$.

5. (1) $\frac{3}{2}$阶.

(2) 4 阶. 提示:$\sin^2 x-\tan^2 x=(\sin x-\tan x)(\sin x+\tan x)$,$\sin x-\tan x$ 是 x 的 3 阶无穷小.

* 习题 1-9

1～4. 略.

5. 对给定 $\varepsilon=0.001$,取 $\delta=\frac{1}{5}\varepsilon=0.000\,2$. 提示:因为 $x\to 2$,所以 $|x-2|<1$,即不妨设 $1<x<3$. 于是,$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|$.

习题 1-10

1. (1) $f(x)$在$[0,2]$上连续.

(2) $f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$上连续,$x=-1$ 为跳跃间断点.

2. (1) $x=1$ 是函数的第二类无穷间断点.

(2) $x=-1$ 是函数的第一类可去间断点;$x=2$ 为第二类间断点.

(3) $x=0$ 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$为可去间断点;$x=k\pi$ $(k\neq 0)$ 为第二类间断点.

(4) $x=0$ 是第一类间断点.

(5) $x=-4$ 是第一类间断点.

(6) $x=0$ 是第一类间断点.

3. $a=-1$.

4. (1) 在点 x_0 处不连续. (2) 在点 x_0 处不连续.

5. $f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -x, & |x|>1. \end{cases}$ $x=\pm 1$ 为第一类间断点.

习题 1-11

1. (1) $\frac{\ln 3}{3}$. (2) 0. (3) $\ln 8$. (4) π. (5) a. (6) $\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$.

2. 略.

3. (1) $\frac{2}{3}$. (2) 1. (3) $\frac{1}{4}$. 提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan^2(\sqrt{1+x^2}-1)}{\sin x\ln(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^4}=\frac{1}{4}$.

习题 1-12

1～4. 略.

复习题一

一、选择题

1～5. BCACC. 6～10. ADDBB. 11～15. CABBB.

二、综合练习 A

1. (1) 0. (2) 不存在. (3) 3. (4) $\frac{1}{2}$.

2. 略.

3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $k=-3$.

5. $\frac{3}{4}$.

三、综合练习 B

1. $q=0$，$p=-5$ 时，$f(x)$为无穷小量；$q\neq 0$ 时，$f(x)$为无穷大量.

2. 连续.

3. $a=0$，$b=\mathrm{e}$.

4. 略.

5. 1.

6. 3.

7. 0.

8. (1) $\left(-\frac{1}{2}\right)$. (2) 0. (3) 0. 提示：$\sin(2\sqrt{n^2+1}\pi)=\sin(2\sqrt{n^2+1}\pi)-\sin 2n\pi$.

习题 2-1

1. $\rho(x_0)=m'(x_0)$.

2. $f'(T)$.

3. (1) $f'(-1)=4$. (2) $f'(4)=\frac{1}{4}$.

4. 27，18.

5. (1) $-f'(x_0)$. (2) $f'(x_0)$. (3) $2f'(x_0)$. (4) $\frac{1}{2x_0}f'(x_0)$.

6. (1) 切线方程：$y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$；法线方程：$y-1=-\mathrm{e}(x-\mathrm{e})$.

(2) 切线方程：$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$或 $y+\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$；

法线方程：$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$或 $y+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

7. $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x<0,\\ 2x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

8. (1) $f(x)$在 $x=0$ 处连续但不可导；(2) $g(x)$在 $x=0$ 处连续、可导；

(3) $h(x)$在 $x=1$ 处不连续、不可导.

9. 略.

习题 2-2

1. (1) $4+\frac{4}{x^3}$.

(2) $\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

(3) $3x^2\cos x-x^3\sin x$.

(4) $\sec^3 x+\tan^2 x\sec x$.

(5) $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

(6) $(2e)^x\ln(2e)+(1-x)e^{-x}$.

(7) $\frac{2}{(x+1)^2}$.

(8) $\frac{\sin t-\cos t+1}{(1+\sin t)^2}$.

(9) $(\theta+1)e^\theta\cot\theta-\theta e^\theta\csc^2\theta$.

(10) $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(11) $2\sqrt{2}(3x^2-1)$.

(12) $3\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$.

(13) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$.

(14) $(2x-3)\ln x+\frac{x^2-3x+1}{x}$.

(15) $\cos 2x$.

(16) $\sec^2\theta\cdot\log_2\theta+\frac{\tan\theta}{\theta\ln 2}$.

(17) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

(18) $\frac{-\csc^2 x\cdot(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cot x}{(1+\sqrt{x})^2}$.

2. (1) $2x^3$.

(2) $-2\arctan x$.

(3) $\sec x$.

(4) $\log_3 x$.

(5) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\ln x$.

(6) $3\cdot 2^x$.

3. (1) $-\frac{2}{\pi}$.

(2) $y'(1)=16,[y(1)]'=0$.

4. (1) $\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{[f(x)]^2}$.

(2) $\frac{xf(x)+2x^2f'(x)-1}{2x\sqrt{x}}$.

5. $x+y+3=0$.

6. (1) v_0-gt. (2) $\frac{v_0}{g}$.

7. $M(1,2)$.

8. $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0,\\ -\sin x, & x<0.\end{cases}$

9. $a=3,b=-1,c=1,d=3$.

习题 2-3

1. (1) $\sin x,\sin 2x$.
   (2) $2x+3,2n(2x+3)^{n-1}$.
   (3) $-\cos x,e^{-\cos x}\sin x$.
   (4) $\tan x,2\csc 2x$.

2. (1) $\sec^2\frac{x}{5}$.
   (2) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (3) $e^{-x}(3\sec^2 3x-\tan 3x)$.
   (4) $\frac{2^x\ln 2}{1+2^x}$.
   (5) $2\sin(4x-2)$.
   (6) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.
   (7) $A\omega\cos(\omega t+\varphi)$.
   (8) $\frac{1}{2x}-\frac{x}{1+x^2}$.
   (9) $2x\sec^2 x\tan x$.
   (10) $\frac{-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.
   (11) $-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^{\frac{2}{3}}}$.
   (12) $\frac{24}{x}(\ln x)^2$.
   (13) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
   (14) $\frac{2x\cos(x^2)\sin x-2\cos x\sin(x^2)}{\sin^3 x}$.
   (15) $\frac{1}{x\ln x}$.
   (16) $\csc x$.
   (17) $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.
   (18) $3^{\sin x}\cdot\ln 3\cdot\cos x$.
   (19) $-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\sec^2\frac{1}{x}$.
   (20) $-\frac{1}{x^2+1}$.
   (21) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.
   (22) $3\sin 6x\cos^3 x-3\sin^2(3x)\cos^2 x\sin x$.

3. (1) $3\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. (2) 0. (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (4) 0.

4. (1) $\frac{2f'(2x)}{f(2x)}$.
   (2) $2e^x f(e^x)f'(e^x)$.
   (3) $2\cos 2x\cdot f'(\sin 2x)$.
   (4) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f(e^x)f'(x)]$.

5. $(0,1)$.

6. $-\frac{1}{(1+x)^2}$.

习题 2-4

1. (1) $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.
   (2) $\frac{y(1-y)}{xy-1}$.
   (3) $\frac{-y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}$.
   (4) $-\frac{1}{2}$.
   (5) $\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$.
   (6) $1-\frac{\pi}{2}$.

(7) $\dfrac{x+y}{x-y}(x-y\neq 0)$.　　(8) $\dfrac{2^x\ln 2(1-2^y)}{2^{x+y}\ln 2-2}$或$\dfrac{2y\ln 2}{2-(2^x+2y)\ln 2}$.

2. $x+3y+4=0$.

3. (1) $-(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x\tan\dfrac{x}{2}+\ln(1+\cos x)}{x^2}$.

(2) $(x-1)\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^2}{x-3}}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{3(x-3)}\right)$.

(3) $(\sin x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln(\sin x)\right]$.

(4) $\dfrac{e^{2x}(x+3)}{\sqrt{(x-4)(x+5)}}\left[2+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{2(x-4)}-\dfrac{1}{2(x+5)}\right]$.

4. (1) $\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$.　(2) $e^{-a}-e^{-2a}$.　(3) $\dfrac{3}{2}(1+t)$.　(4) 2.

5. (1) 切线方程：$y=\dfrac{-1}{2}(x-3)$；法线方程：$y=2(x-3)$.

(2) 切线方程：$y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{-1}{2}(x-1)$；法线方程：$y-\dfrac{3}{2}=2(x-1)$.

6. $a=\dfrac{e}{2}-2$，$b=1-\dfrac{e}{2}$，$c=1$.

7. $\dfrac{1}{10\pi}$ cm/s.

8. $H_t'=0.64$ cm/min.

习题 2-5

1. (1) $2+2^x\ln^2 2$.　　(2) $\dfrac{-a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$.　　(4) $-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(5) $e^{-t}(4\sin 2t-3\cos 2t)$.　　(6) $2x(2x^2+3)e^{x^2}$.

(7) $-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$.　　(8) $\dfrac{2(\sqrt{1-x^2}-x\arccos x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. (1) $y''(e)=\dfrac{-3}{4e^4}$.　　(2) $y''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$.

3. (1) $2(-1)^n n!\ \dfrac{1}{(1+x)^{n+1}}$.　　(2) $y'=1+\ln x$，$y^{(n)}=(-1)^n(n-2)!\ \dfrac{1}{x^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$.

(3) $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

(4) $2^n x\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+n2^{n-1}\sin\left(2x+\dfrac{n-1}{2}\pi\right)$.

4. $f^{(10)}(x)=e^{-x}(x^2-20x^2+90)$.

5. (1) $\dfrac{12(3y^2+x^2)}{(3y^2-x^2)^3}$.　　(2) $\dfrac{-2(1+y^2)}{y^5}$.

(3) $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$.　　(4) $\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$.

(5) $\frac{1+t^2}{4t}$.　　(6) $\frac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$.

习题 2-6

1. $\Delta y=-1.141$, $dy=-1.2$; $\Delta y=0.120\ 6$, $dy=0.12$.

2. (1) $\frac{dx}{(1-x)^2}$.　　(2) $\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}dx$.

(3) $\left(\frac{4}{x}\ln x+1\right)dx$.　　(4) $4\tan(1+2x)\sec^2(1+2x)dx$.

(5) $(3x^2-4x-8)dx$.　　(6) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$.

(7) $\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$.　　(8) $e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$.

(9) $\frac{4x^3y}{2y^2+1}dx$.　　(10) $\frac{3}{3x+1}\sin[2\ln(3x+1)]dx$.

(11) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)dx$.　　(12) $\frac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}dx$.

3. (1) $\frac{x^2}{2}$.　　(2) $\ln(1+x)$.

(3) $-\frac{\cos 2x}{2}$.　　(4) $-\frac{e^{-3x}}{3}$.

(5) $\frac{1}{1+e^{4x}}$, $\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$.　　(6) $\cos(\cos x)$, $-\sin x\cos(\cos x)$.

4. $-\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+2}dx$, $-\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+2}$.

5. $\frac{2}{t}$.

6. (1) 1.034 9.　(2) 2.745 5.　(3) 9.986 7.　(4) 0.001.

7. 略.

8. 2.228 cm.

9. 6.31 cm^2, 6.28 cm^2.

10. $-43.63\ cm^2$, $104.72\ cm^2$.

复习题二

一、选择题

1～5. BDBAB.　　6～10. CBBBA.　　11～13. DCC.

二、综合练习 A

1. $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geqslant 0,\\ -3x^2, & x<0.\end{cases}$

2. $dy=\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}dx$.

3. $y'=\frac{1}{x^2}\ln 2\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot 2^{\cos^2\frac{1}{2}}$.

4. $dy=\cot(u^2+v)(2udu+dv)$.

5. $f'(0)=1$.

6. $y'=\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}\cdot\dfrac{1}{1+x}$.

7. $y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}+\cos x\cdot\ln(1+x^2)\right]$.

8. $y^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot n!(1+2x)^{-(n+1)}$.

9. $y'(0)=2$.

10. (1) $2[f'^2(x)+f(x)f''(x)]$. (2) $4x^2f''(x^2+b^2)+2f'(x^2+b^2)$.

(3) $\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$.

11. $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, $x\neq 1$.

12. 略.

三、综合练习 B

1. $g(a)$.

2. -1.

3. 6.

4. $g'(x)=\begin{cases}3x^2-2x, & x\geqslant 1,\\ 1, & x<1.\end{cases}$

5. $a=1,b=0$, $f'(1)=f'_-(1)=f'_+(1)=1$.

6. $a=2,b=-1$.

7. (1) $\varphi'(0)=a^2$. (2) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

8. (1) $c>0$. (2) $c>1$. (3) $c>2$.

9. 略.

习题 3-1

1～3. 略.

4. 方程 $f'(x)=0$ 有且仅有两个实根,分别在区间(2,3),(3,4)内,方程 $f''(x)=0$ 有且仅有一个实根. 提示:方程 $f'(x)=0$ 仅有两个实根利用 $f'(x)$是二次多项式,最多只能有两个实根.

5. 提示:证明函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ 的导数为零,再确定任意常数.

6～7 略.

习题 3-2

1. (1) $-\dfrac{3}{5}$. (2) $\dfrac{\cos a}{2a}$. (3) $1-\ln 2$. (4) $\dfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$.

(5) $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$. (6) $\dfrac{2}{\pi}$. (7) 1. (8) $\dfrac{1}{3}$.

(9) $-\dfrac{1}{8}$. (10) $\dfrac{1}{2}$. (11) $\dfrac{1}{6}$. (12) $\dfrac{1}{2}$.

(13) $e^{\frac{3}{4}}$. (14) e^{-1}. (15) 1. (16) $\dfrac{1}{2}$.

2～3. 略.

习题 3-3

1. (1) $-3+19(x-1)+8(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$.

(2) $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}(x-1)^n+R_n(x)$.

(3) $e^{-5}\left[1-(x-5)+\frac{1}{2!}(x-5)^2-\frac{1}{3!}(x-5)^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}(x-5)^n\right]+R_n(x)$.

(4) $\ln\frac{1}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{2^2}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2^3}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\cdots-\frac{2^n}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n+R_n(x)$.

2. (1) $-x^2+o(x^2)$.

(2) $x-x^2+\frac{1}{2!}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^n+o(x^n)$.

3. $4\ln 2+2(2\ln 2+1)(x-2)+\frac{2\ln 2+3}{2!}(x-2)^2+\frac{1}{3!}(x-2)^3-\frac{2}{4!\,\xi^2}(x-2)^4$

(ξ 介于 2 与 x 之间).

4. 4 阶.

5. 0.309 0, $|R_4|<10^{-4}$.

6. 3.107 2, $|R_3|<10^{-4}$.

7. (1) $\frac{1}{6}$.　(2) $\frac{1}{6}$.

习题 3-4

1. 单调减少.

2. (1) 单调增区间$(-\infty,-1],[3,+\infty)$; 单调减区间$[-1,3]$.

(2) 单调增区间$(-\infty,-2],[2,+\infty)$; 单调减区间$[-2,0),(0,2]$.

(3) 单调增区间$(-\infty,+\infty)$.

(4) 单调增区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, 单调减区间$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(5) 单调增区间$[-1,1]$, 单调减区间$(-\infty,-1],[1,+\infty)$.

(6) 单调增区间$[0,2]$, 单调减区间$(-\infty,0],[2,+\infty)$.

(7) 单调增区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, 单调减区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

(8) 单调增区间$(-\infty,0],[1,+\infty)$; 单调减区间$[0,1]$.

3～4. 略.

习题 3-5

1. (1) 极大值 $y(-1)=6$, 极小值 $y(3)=-26$.

(2) 极小值 $y(0)=0$.

(3) 极小值 $y(1)=2-4\ln 2$.

(4) 极小值 $y\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2\sqrt{2}$.

(5) 极小值 $y(1)=0$,极大值 $y(e^2)=\frac{4}{e^2}$.

2. $a=2$,$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$为极大值.

3. (1) 最大值 $y(4)=142$,最小值 $y(1)=7$.

(2) 最大值 $y(1)=0$,最小值 $y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2$.

(3) 无最大值,最小值 $y(-3)=27$.

4. 当 n 为奇数时,$x=0$ 是极大值点(唯一的),也是最大值点,最大值为 1;当 n 为偶数时,无最值点.

5. $\frac{a}{3}$.

6. 当剪去扇形的圆心角为 $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$时,所围成的圆锥形漏斗的容积最大.

提示:设剪后剩余部分的圆心角为 x,$x\in(0,2\pi)$,圆锥形漏斗的斜高为 R,圆锥的底半径为 r,则有 $2\pi r=Rx$,圆锥高 $h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$,所以圆锥的体积 $V(x)=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

作 $V^*(x)=x^4(4\pi^2-x^2)$,求 $V^*(x)$的极值点得到.

习题 3-6

1. 凸.

2. (1) $[1,+\infty)$凸,$(-\infty,1]$凹,拐点$(1,2)$.

(2) $(-\infty,+\infty)$凹,无拐点.

(3) $[0,+\infty)$凸,$(-\infty,0]$凹,拐点$(0,0)$.

(4) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$凸,$\left[-\frac{1}{2},0\right)$及$(0,+\infty)$凹;拐点$\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

(5) $(-\infty,-1]$及$[1,+\infty)$凸,$[-1,1]$凹;拐点为$(-1,\ln 2)$与$(1,\ln 2)$.

(6) $[-6,0]$及$[6,+\infty)$凸,$(-\infty,-6]$,$[0,6]$凹; 拐点为$\left(-6,-\frac{9}{2}\right)$,$(0,0)$与$\left(6,\frac{9}{2}\right)$.

(7) $[-3,-1]$凸,$(-\infty,-3]$及$[-1,+\infty)$凹;拐点为$(-3,10e^{-3})$与$(-1,2e^{-1})$.

(8) $(-\infty,2]$凸,$[2,+\infty)$凹;拐点为$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$.

3. $a=-\frac{3}{2}$,$b=\frac{9}{2}$; $(-\infty,1]$凹,$[1,+\infty)$凸.

4. $k=\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

5. $a=-3$,$b=6$.

习题 3-7

1. (1) $y=1$,$x=0$. (2) $y=0$, $x=-1$. (3) $y=0$.

(4) 垂直渐近线 $x=-3$,$x=1$,斜渐近线 $y=x-2$.

2. 略.

△ **习题 3-8**

1. (1) $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $R=\sqrt{2}$. (2) $k=\frac{1}{4}$, $R=4$.

2. 在抛物线顶点 $x=-\frac{b}{2a}$ 处的曲率最大.

3. 略.

4. $\left(\xi-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

5. 约为 4 540 N.

△ **习题 3-9**

1. 300 台.

2. 产量为 18 时利润最大,最大利润为 112.

3. (1) 3. (2) 6.

4. $-P\ln 4$.

5. 需求弹性 $-\frac{1}{4}P$; $P=3$, $P=4$, $P=5$ 时的需求弹性分别为 $-\frac{3}{4}$, -1, $-\frac{5}{4}$.

6. (1) $P=4$ 时的边际需求 $Q'=-8$. 这表明当 $P=4$ 时,价格增加一个单位,需求将减少 8 个单位.
(2) $P=4$ 时的需求弹性约为 -0.54. 这表明当 $P=4$ 时,价格增加 1%,需求将减少 0.54%.
(3) $P=4$ 时,若价格 P 上涨 1%,总收益将增加 0.46%.
(4) 当 $P=6$ 时,若价格 P 上涨 1%,总收益将减少 0.85%.
(5) 当 $P=5$ 时,总收益最大.

复习题三

一、选择题

1～5. CCBBA. 6～10. CABBC. 11～14. DBCD.

二、综合练习 A

1. 提示: $e^x>ex$ 相当于 $e^x-e^1>e(x-1)$.

2. 提示: 作 $f(x)=x^\alpha-1-\alpha+\alpha x$, $x\in(0,+\infty)$, $0<\alpha<1$, 求得 $f(1)$ 为极大值,也是最大值,从而原不等式可证.

3. (1) $\frac{2}{3}$. (2) 0. (3) 0.

4. 单调增区间 $(-\infty,+\infty)$.

5. 略.

6. 不一定. 如 $f(x)=x^2$ 在 $(-1,1)$ 上非单调,但其导函数 $f'(x)=2x$ 为单调的; $f(x)=x+\sin x$ 是单调的,但其导函数 $f'(x)=1+\cos x$ 不是单调的.

三、综合练习 B

1. (1) $\frac{1}{2}$. (2) 2. (3) $\frac{2}{3}$. (4) 0. (5) $\frac{1}{6}$. (6) $(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$.

2. (1)～(5)略. (6) 提示:为证左边不等式,令 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$,则 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,它是非

单调函数. 令 $f'(x)=0$ 求得唯一驻点 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$,且由 $\cos x$ 单调减,对 $f'(x)$讨论可证.

3. 提示:设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$,验证 $f(x)$在$[0,x_0]$上满足罗尔定理的条件,用罗尔定理证明.

4～6. 略.

7. 提示:将 b 改为 x.

8. $f(x)=\sin x$ 为有界可导函数,$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在.

习题 4-1

1. (1) $-\frac{1}{2x^2}+C$.

(2) $\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+C$.

(3) $-3\cos x+\frac{2}{5}\sqrt{x}+C$.

(4) $\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x+C$.

(5) $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$.

(6) $x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C$.

(7) $x-\arctan x+C$.

(8) $\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$.

(9) $3\arctan x-2\arcsin x+C$.

(10) $\frac{3^x\mathrm{e}^x}{\ln 3+1}+C$.

(11) $-\cot x-x+C$.

(12) $\tan x-\sec x+C$.

(13) $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$.

(14) $\frac{1}{2}\tan x+C$.

(15) $-(\cot x+\tan x)+C$.

2. $y=1+\ln x$.

3. (1) 27 m. (2) 7.11 s.

习题 4-2

1. (1) $-\frac{1}{16}(5-4x)^4+C$.

(2) $-\frac{1}{5}\ln|1-5x|+C$.

(3) $-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(4) $-\left(\frac{1}{a}\right)\cos ax-b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+C$.

(5) $a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$.

(6) $-2\cos\sqrt{x}+C$.

(7) $\left(\frac{1}{11}\right)\tan^{11}x+C$.

(8) $\ln|\ln\ln x|+C$.

(9) $\arctan\mathrm{e}^x+C$.

(10) $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$.

(11) $-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

(12) $-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$.

(13) $\frac{1}{5}\cos^5x-\frac{1}{3}\cos^3x+C$.

(14) $\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$.

(15) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$.

(16) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C$.

(17) $\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(18) $\frac{1}{3}\sec^3x-\sec x+C$.

(19) $-\frac{1}{2\ln 10}10^{2\arccos x}+C$.

(20) $(\arctan\sqrt{x})^2+C$.

(21) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

(22) $\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}-x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$.

(23) $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$.

(24) $-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$.

习题 4-3

1. (1) $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$.

(2) $-e^x(x+1)+C$.

(3) $\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C$.

(4) $\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\left(\ln x-\frac{1}{1-n}\right)+C$.

(5) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$.

(6) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C$.

(7) $x\left(\ln\frac{x}{2}-1\right)+C$.

(8) $2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$.

(9) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$.

(10) $-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$.

(11) $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

(12) $x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

(13) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

(14) $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

(15) $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$.

(16) $-\frac{2}{17}e^{-2x}\left(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\right)+C$.

2. $f(x)=x\ln|x|+C$.

△ 习题 4-4

1. (1) $-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$. 提示：$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$. 解得 $A=-\frac{1}{2}$，$B=2$，$C=-\frac{3}{2}$.

(2) $\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$. 提示：$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}$，解得 $A=1$，$B_1=-1$，$B_2=1$.

(3) $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

(4) $\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+3)-\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C$. 提示：$\frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+3}$，解得 $A=1$，$B=-1$，$C=-1$.

(5) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$.

(6) $x-4\sqrt{x+1}+4\ln|1+\sqrt{x+1}|+C$.

复习题四

一、选择题

1～5. BBCAC.　　6～10. DDDCC.　　11～12. CA.

二、综合练习 A

1. $s=\frac{3}{2}t^2-2t+5$.

2. (1) $-\left|\arcsin\frac{1}{x}\right|+C$.　　(2) $-2\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$.

(3) $2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+C$　　(4) $\arctan(x\ln x)+C$.

(5) $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{52}(2x+1)^{52}-\frac{1}{51}(2x+1)^{51}\right]+C$.　　(6) $\sqrt{x^2-9}-3\operatorname{arccos}\frac{3}{|x|}+C$.

(7) $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$.　　(8) $\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

3. 略.

4. $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$. 提示：$\int xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$，而 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x}$，由此即得.

5. $f(x)=x+\frac{x^3}{3}+1$.

三、综合练习 B

1. (1) $\arcsin x-\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+C$.　　(2) $\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C$.

(3) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$.

(4) $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C$.

(5) $\frac{1}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)\mathrm{e}^{ax}+C$.

(6) $\frac{x}{x-\sin x}+C$. 提示：$\int\frac{x\cos x-\sin x}{(x-\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x(\cos x-1)+x-\sin x}{(x-\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int x\left(\frac{1}{x-\sin x}\right)'\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x-\sin x}\mathrm{d}x$.

(7) $\mathrm{e}^{\sin x}(x-\sec x)+C$. 提示：$\int\mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int x(\mathrm{e}^{\sin x})'\mathrm{d}x-\int\mathrm{e}^{\sin x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)'\mathrm{d}x$.

2. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x-\arctan x+C$. 提示：将 $-x$ 代取代 x 得另一方程 $f'(-x)-xf'(x)=-x$. 由此解得 $f'(x)=\frac{x+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

3. $\frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\sqrt{2\arctan\mathrm{e}^x}}$. 提示：由 $\int f(x)F(x)\mathrm{d}x=\int F(x)\mathrm{d}F(x)=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ 得到 $\frac{1}{2}F^2(x)=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x=\arctan\mathrm{e}^x+C$.

4. $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-2\cos\dfrac{x}{2}+C_1, & x\leqslant 0,\\ x\arctan 2x-\dfrac{1}{4}\ln(1+4x^2)-2+C_1, & x>0.\end{cases}$

习题 5-1

1. (1) $k(b-a)$. (2) $\dfrac{1}{2}$. (3) $\mathrm{e}-1$.

2. (1) 圆面积的$\dfrac{1}{4}$. (2) 对称区间上的偶函数.

习题 5-2

1. (1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 较大. (2) $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 较大. (3) $\int_1^{1.5}\ln(1+x)\mathrm{d}x$ 较大. (4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 较大.

(5) $\int_0^1 x(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x$ 较大.

2. (1) $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant 51$. (2) $2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$.

3. $\dfrac{1}{4}\int_0^4\sin\omega x\,\mathrm{d}x$.

4. 略

习题 5-3

1. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$. (2) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

(3) $-\cos(\pi\sin^2 x)\cdot\cos x-\cos(\pi\cos^2 x)\cdot\sin x$. (4) $\dfrac{2\sin x^2}{x}-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2x}$.

2. 最大值为 $F(0)=0$,最小值为 $F(4)=-\dfrac{32}{3}$.

3. (1) 1. (2) $\dfrac{1}{2}$. (3) $\dfrac{\cos 1}{2}$. (4) 1.

4. (1) $2\dfrac{5}{8}$. (2) $45\dfrac{1}{6}$. (3) $1+\dfrac{\pi}{4}$. (4) $1-\dfrac{\pi}{4}$. (5) $\dfrac{\pi}{3a}$. (6) $\dfrac{\pi}{3}$.

(7) $\dfrac{\pi}{2}$. (8) 5. (9) $\dfrac{11}{6}$. (10) $\dfrac{8}{3}$.

5. 略.

习题 5-4

1. (1) $2(2-\arctan 2)$. (2) $4-2\ln 3$. (3) $\dfrac{3}{16}$. (4) $\dfrac{\pi}{6}$.

(5) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{32}{17}$. 提示:原式 $=\int_1^2\dfrac{x^3}{x^4(1+x^4)}\mathrm{d}x$. (6) $\dfrac{\pi}{16}a^4$. 提示:利用例 8 的结果.

(7) $\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$. (8) $2(\sqrt{3}-1)$. (9) $\dfrac{65}{4}$. (10) $\arctan\mathrm{e}-\dfrac{\pi}{4}$. (11) $\dfrac{1}{5}$. (12) $\dfrac{1}{6}$.

(13) 12. (14) $\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\ln 3$.

2. (1) 0. (2) $8I_4=\frac{3}{2}\pi$. (3) $\frac{\pi^3}{324}$. (4) 0. (5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-2\ln 2$. (6) $\ln 3$.

3. (1) $\frac{3}{e^2}-\frac{4}{e^3}$. (2) $\pi-2$. (3) $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (4) $\ln 2-\frac{1}{2}$.

(5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)\pi-\frac{1}{2}\ln 2$. (6) $4(2\ln 2-1)$. (7) 1. (8) $2\ln(2+\sqrt{5})-\sqrt{5}+1$.

4. 略.

习题 5-5

1. (1) 1. (2) $\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}$. (3) 2. (4) $\frac{2}{3}\ln 2$. (5) 发散. (6) $\frac{1}{a}$. (7) 1. (8) 发散.

(9) 2. (10) $\frac{\pi^2}{8}$.

复习题五

一、选择题

1～5. AACCB. 6～10. DBDAC. 11～15. ABBBD. 16～18. CDD.

二、综合题 A

1. $50a+10v_0$.

2. $-\frac{\cos x}{e^y}$或$\frac{\cos x}{\sin x-1}$.

3. 2.

4. (1) $\frac{\pi}{2}$. (2) $\frac{1}{3}\ln 2$. (3) $\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$. (4) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

5. $f(x)=x-\frac{1}{3}$.

6. $y'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $y''=f(x)$.

7. 略.

8. $-\pi\ln\pi-\sin 1$.

9. 3. 提示：对积分$\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\mathrm{d}x$用两次分部积分.

10. 提示：利用公式$\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x$，对第三项作换元 $x=t+l$ 即可证明.

11. 略.

三、综合练习 B

1. (1) 0. (2) $\frac{1}{p+1}$. (3) $\frac{16}{e^2}$.

2. $\frac{1}{2}$.

3. $\frac{3}{4}$.

4. $\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}, & -1\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

5. $6\sin 1-6\cos 1-1$.

6. -2.

7. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8～10. 略.

习题 6-1

1. (1) $\frac{3}{2}-\ln 2$. (2) 2. (3) $\frac{7}{6}$. (4) 约 6.38. (5) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

2. $\frac{9}{4}$.

3. (1) π. (2) $\frac{9}{2}\pi$. (3) $\frac{3}{8}\pi a^2$.

习题 6-2

1. (1) $\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{2}$. (2) $\frac{128}{7}\pi,\frac{64}{5}\pi$. (3) $\frac{15\pi}{2},\frac{124\pi}{5}$. 提示：绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积可参照综合题第 1 题的公式.

2. $\frac{2R^3\tan\alpha}{3}$.

△习题 6-3

1. (1) $\frac{1}{2}\pi^2 a$. (2) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. (3) $\frac{14}{3}$. (4) $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

2. $\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

△习题 6-4

1. 4.9 J.

2. $\frac{kq_0q}{a}$.

3. 5.77×10^5 kJ.

4. 2.1×98 kN.

5. 0.168×9.8 N.

6. $P=\frac{1}{2}U_mI_m\cos\varphi_0$.

7. (1) 9 987.5. (2) 19 850.

8.（1）490 百元.　（2）12.31 百元，11.94 百元.

9.（1）2.5 百台，最大总利润 6.25 万元.　（2）减少 0.25 万元.

复习题六

一、选择题

1～6. DCADBD.

二、综合练习 A

1. 略.

2. $\frac{1}{2}\pi R^2 h$.

三、综合练习 B

1.（1）$A(1,1)$.　（2）$\frac{\pi}{6}$.

2.（1）$a=0$.　（2）$\frac{\pi}{30}(\sqrt{2}+1)$.

3. 4.

4. $2\pi^2 bR^2$.

5. $\frac{kmM}{a(l+a)}$.

习题 7-1

1.（1）是，且为特解.　（2）不是.　（3）是，且为通解.　（4）不是.

2. $y=(4+2x)e^{-x}$.

3.（1）$s=(t-1)e^t+C$.　（2）$y=-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x+\frac{3}{\omega}x$.

4.（1）$y'=x^2$.　（2）$yy'+2x=0$.

习题 7-2

1.（1）$y=Ce^{x^2}$；　（2）$y=\frac{1}{\ln|x+1|+C}$；

（3）$y^4(4-x)=Cx$；　（4）$10^x+10^{-y}=C$；

（5）$4(y+1)^3+3x^4=C$.

2.（1）$\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=C$.　（2）$x=Ce^{\arcsin\frac{y}{x}}(x>0,C>0)$及 $y=\pm x,(x>0)$.

（3）$\sin\frac{y}{x}=Cx$.　（4）$y=-\frac{x}{\ln|Cx|}$.

（5）$\ln\frac{x}{y}-1=Cy$.

3.（1）$y=\frac{1}{\ln|x+1|+1}$.　（2）$y=\sqrt{2e^x-1}$.

4. $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

5. 200 个单位.

6. $xy=6$.

习题 7-3

1. (1) $y=Ce^{x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$.　　(2) $y=Ce^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$.

(3) $y=Cx^{2}e^{\frac{1}{x}}+x^{2}$.　　(4) $y=\frac{C}{x}+\frac{1}{4}x^{3}$.

(5) $x=Cy+\frac{1}{2}y^{3}$ 或 $y=0$.

(6) 当 $a=0$ 时，$y=x+\ln|x|+C$；当 $a=1$ 时，$y=Cx+x\ln|x|-1$；当 $a\neq 1,a\neq 0$ 时，$y=Cx^{a}+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$.

2. (1) $y=x\sec x$.　　(2) $T=e^{-kt}+100$.

3. (1) $\frac{1}{y}=\frac{1}{4}(Cx^{2}+2\ln x+1)$.　　(2) $y^{2}=Cx^{2}+x$.

△4. (1) $y=\pm\sqrt{Cx+\frac{1}{2}x^{3}}$.　　(2) $\frac{1}{(y-x)^{2}}=Ce^{x^{2}}-x^{2}-1$.

(3) $\left(-\frac{3}{7}x^{3}+Cx^{\frac{2}{3}}\right)y^{\frac{1}{3}}=1$.　　(4) $y^{-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+Cx^{\frac{2}{3}}$.

5. $T_{0}=-30$ °F.

习题 7-4

1. (1) $y=xe^{x}-3e^{x}+C_{1}x^{2}+C_{2}x+C_{3}$.　　(2) $C_{1}y^{2}-1=(C_{1}x+C_{2})^{2}$.

(3) $4(C_{1}y-1)=C_{1}^{2}(x+C_{2})^{2}$.　　(4) $y=-\ln|\cos(x+C_{1})|+C_{2}$.

(5) $y=(1+C_{1}^{2})\ln\left(1+\frac{x}{C_{1}}\right)-C_{1}x+C_{2}$.　　(6) $y=C_{1}+\arcsin(C_{2}e^{x})$.

2. (1) $y=\sqrt{2x-x^{2}}$.　(2) $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.　(3) $y=\sin x$.

习题 7-5

1. (1) 线性无关.　(2) 线性无关.　(3) 线性相关.　(4) 线性相关.

2. $y=C_{1}\cos\omega x+C_{2}\sin\omega x$.

3～4. 略.

习题 7-6

1. (1) $y=C_{1}e^{2x}+C_{2}e^{3x}$.　　(2) $y=(C_{1}+C_{2}x)e^{4x}$.

(3) $y=e^{-x}(C_{1}\cos\sqrt{3}x+C_{2}\sin\sqrt{3}x)$.　　(4) $y=e^{x}\left(C_{1}\cos\frac{x}{2}+C_{2}\sin\frac{x}{2}\right)$.

(5) $y=C_{1}e^{2x}+C_{2}e^{-\frac{4}{3}x}$.　　(6) $y=C_{1}e^{2x}+C_{2}e^{-2x}+(C_{3}\cos 3x+C_{4}\sin 3x)$.

2. (1) $y=(1+2x)e^{-2x}$.　　(2) $y=4e^{x}+2e^{3x}$.

(3) $y=\frac{2}{3}\sqrt{3}e^{\frac{-x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.　　(4) $y=3+e^{-x}$.

习题 7-7

1. (1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{x}{2}+\frac{11}{8}$.　　(2) $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$.

(3) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{e^x}{10}$.　　(4) $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)e^{3x}$.

△(5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x$.　　△(6) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$.

△(7) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}x\sin x$.

△(8) $y=e^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)+\frac{\cos 2x}{17}-\frac{4\sin 2x}{17}$.

2. (1) $y=e^x-e^{-x}+e^x(x^2-x)$.　　(2) $y=\frac{11}{16}+\frac{5}{16}e^{4x}-\frac{5}{4}x$.

△3. (1) $C_1+C_2x^2+\frac{1}{3}x^3$.　　(2) $y=C_1x^{-2}+C_2x^{\frac{1}{2}}$.

△习题 7-8

1. (1) $\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{2}e^t+t,\\ y=C_1\sin t-C_2\cos t+\frac{1}{2}e^t-1.\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=3+C_1\cos t+C_2\sin t,\\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x=\cos t+\frac{1}{2}t\sin t+t^2-2,\\ y=\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t+2t.\end{cases}$

△习题 7-9

1. (1) $-4t-2,-4$.　(2) $\frac{-2t-1}{t^2(t+1)^2},\frac{6t^2+12t+4}{t^2(t+1)^2(t+2)^2}$.　(3) $6t+2,6$.

(4) $6t^2+4t+1,12t+10$.　(5) $e^{2t}(e^2-1),e^{2t}(e^2-1)^2$.

2. (1) 3 阶.　(2) 6 阶.

3. (1) $y_t=C2^t$.　(2) $y_t=C(-1)^t$.　(3) $y_t=C2^t-6(3+2t+t^2)$.

(4) $y_t=C(-1)^t+\frac{1}{3}\cdot 2^t$.　(5) $y_t=C+t^2-t$.

4. (1) $y_t=\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^t+\frac{1}{6}$.　(2) $y_t=2+3t$.　(3) $y_t=3\left(-\frac{1}{2}\right)^t$.　(4) $y_t=C(-7)^t+2$.

复习题七

一、选择题

1～5. CBACB.　　6～10. CDDBA.　　11～15. BCACD.

二、综合练习 A

1. $\ln x+\int\frac{g(v)\mathrm{d}v}{v(f(v)-g(v))}=C$,积分后代入 $v=xy$,可得通解.

2. $u(x)=x+\frac{x^2}{2}+C$.

3～4. 略.

5. $y=C_1e^x+C_2x$.

6. 微分方程 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$，通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$.

三、综合练习 B

1.（1）$x=Ce^y-y-1$.　（2）$(x-y)^2=-2x+C$.　（3）$xy=e^{Cx}$.

2～3. 略.

4. $C_1\left(\cos x+\frac{\cos 1}{1-\sin 1}\sin x\right)$.

5. $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+e^x)$.

6. 新的方程为 $x''-x=e^{2y}$. 其中 y 为自变量.

7. $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$，$0\leqslant t\leqslant T$.

8. $\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})$ s.